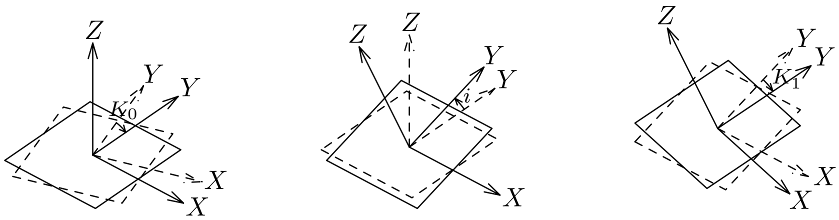
La fotografía inclinada

Javier Múgica de Rivera

Septiembre de 2004. Revisado mayo 2005

1. Descomposición de la matriz de rotación a través de la línea de máxima pendiente



Pasamos del sistema terreno al sistema de la fotografía mediante las siguientes rotaciones: En primer lugar realizamos un giro en torno al eje Z de valor K_0, hasta situar el eje Y siguiendo la línea de máxima pendiente de la fotografía. A continuación un giro respecto al eje X de valor $-i$, en donde i es el ángulo de inclinación de la fotografía. Por último otro giro respecto al eje Z de valor K_1 para situar los ejes como se encuentran en la fotografía. Efectuando el producto de matrices:

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \cos K_1 & -\operatorname{sen} K_1 & 0 \\ \operatorname{sen} K_1 & \cos K_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \operatorname{sen} i \\ 0 & -\operatorname{sen} i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos K_0 & -\operatorname{sen} K_0 & 0 \\ \operatorname{sen} K_0 & \cos K_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos K_1 \cos K_0 - \operatorname{sen} K_1 \operatorname{sen} K_0 \cos i & -\cos K_1 \operatorname{sen} K_0 - \operatorname{sen} K_1 \cos K_0 \cos i & -\operatorname{sen} K_1 \operatorname{sen} i \\ \operatorname{sen} K_1 \cos K_0 + \cos K_1 \operatorname{sen} K_0 \cos i & -\operatorname{sen} K_1 \operatorname{sen} K_0 + \cos K_1 \cos K_0 \cos i & \cos K_1 \operatorname{sen} i \\ -\operatorname{sen} K_0 \operatorname{sen} i & -\cos K_0 \operatorname{sen} i & \cos i \end{pmatrix}$$

Es más interesante el problema inverso: a partir de la matriz de rotación extraer los valores de los giros. Salta a la vista $\cos i$ en la parte inferior derecha de la matriz. Sin embargo este valor no se debe usar para obtener i. Si el ángulo i es pequeño, como suele suceder, entonces i queda determinado por la diferencia a 1 de $\cos i$, que vale aproximadamente $i^2/2$. Es decir, que para obtener i con una exactitud de 10^{-6}rad necesitamos tener $\cos i$ con una exactitud de $\mathrm{d}(\frac{i^2}{2})/\mathrm{d}i \cdot 10^{-6} = 10^{-6}i$. Empleando el seno, como para ángulos pequeños $\operatorname{sen} i \sim i$, la precisión con la que necesitamos obtener $\operatorname{sen} i$ es la misma que aquella con la que queremos i, en este caso 10^{-6}. Por lo tanto, en ángulos pequeños para el coseno necesitamos i veces la precisión que se necesita para el seno, pudiendo ser i 10^{-3} ó 10^{-4}, que sin ser habitual tampoco es excepcional.

$\operatorname{sen} i$ lo podemos obtener de la última fila o de la última columna, descontando el elemento $\cos i$. Así, $m_{31}^2 + m_{32}^2 = \operatorname{sen}^2 i$, y también $m_{13}^2 + m_{23}^2 = \operatorname{sen}^2 i$.[†]

Una vez conocido $\operatorname{sen}^2 i$ tenemos dos posibilidades para $\operatorname{sen} i$, que nos dan los ángulos $+i$ y $-i$. El valor del coseno no sirve para discriminar, ya que $\cos i = \cos(-i)$. En realidad los dos ángulos son posibles. Podemos ver en la figura de más arriba, que si primero realizamos un giro $K_1 + 180^{\mathrm{o}}$ que sitúe el sentido positivo del eje Y según el sentido descendente de la línea de máxima pendiente, luego un giro $\Omega = -(-i)$ y finalmente un giro $K_1 - 180^{\mathrm{o}}$, el resultado es el mismo. También podemos comprobarlo haciendo en la matriz las sustituciones $i \to -i$, $K_0 \to K_0 + 180$, $K_1 \to K_1 + 180$. Por convenio tomaremos simpre el ángulo i positivo.

Los ángulos K_0 y K_1 los obtenemos como $\tan K_0 = \frac{m_{31}}{m_{32}}$, $\tan K_1 = \frac{m_{13}}{m_{23}}$.

Si el ángulo i es muy pequeño la dirección de la línea de máxima pendiente no está bien definida, llegando a la indefinición total cuando $i = 0$, situación en la que cualquier línea es de máxima pendiente. Entonces tampoco quedan bien definidos K_0 y K_1. Sin embargo el giro K total, $K_0 + K_1$, sí que está bien definido. En el caso extremo $i = 0$, $K_0 + K_1$ es el ángulo que forman los ejes X, Y de la fotografía con los del sistema de referencia, que está perfectamente definido. Lo que queda indeterminado es qué parte de ese giro asignamos a K_0 y cuál a K_1; es decir, dónde está la línea de máxima pendiente. Si en la matriz de rotación sustituímos i por 0:

$$\begin{pmatrix} \cos K_1 \cos K_0 - \operatorname{sen} K_1 \operatorname{sen} K_0 & -(\cos K_1 \operatorname{sen} K_0 + \operatorname{sen} K_1 \cos K_0) & 0 \\ \operatorname{sen} K_1 \cos K_0 + \cos K_1 \operatorname{sen} K_0 & \cos K_1 \cos K_0 - \operatorname{sen} K_1 \operatorname{sen} K_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $i = 0$ lo que estamos haciendo es dos giros K consecutivos: K_0 y K_1, cuyo resultado es un giro K de valor $K_0 + K_1$.

[†]Esta propiedad se cumple para cualesquiera fila y columnas. La componente cuadrática de una fila o columna suma 1. Por lo tanto, sean una fila f y una columna c, si eliminamos el elemento que tienen en común, la componente cuadrática de los restantes elementos en la fila y en la columna ha de sumar lo mismo, puesto que a ambas les falta el elemento común para llegar a 1. Lo esencial para que se cumpla la propiedad es que el módulo de los vectores fila y columna sea siempre el mismo, por lo que se sigue cumpliendo si multiplicamos la matriz por una constante.

En la matriz original, en las posiciones m_{11}, m_{22}, m_{12} y m_{21} no tenemos $\cos(K_0 + K_1)$ ni $\operatorname{sen}(K_0 + K_1)$, pero con un poco de ingenio los podemos obtener.

$$\begin{aligned} m_{11} + m_{22} &= \cos K_1 \cos K_0(1+\cos i) - \operatorname{sen} K_1 \operatorname{sen} K_0(1+\cos i) = \\ &= \cos(K_0+K_1)(1+\cos i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -m_{12} + m_{21} &= \cos K_1 \operatorname{sen} K_0(1+\cos i) + \operatorname{sen} K_1 \cos K_0(1+\cos i) = \\ &= \operatorname{sen}(K_0+K_1)(1+\cos i) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\cos(K_0+K_1) = \dfrac{m_{11}+m_{22}}{1+m_{33}}$, $\operatorname{sen}(K_0+K_1) = \dfrac{-m_{12}+m_{21}}{1+m_{33}}$

Como ya vimos, para ángulos pequeños o próximos a 180º es mejor emplear el seno que el coseno en la determinación del ángulo. Sin embargo, si el ángulo está próximo a 90º o 270º es mejor el coseno por la misma razón. Entonces podemos emplear el siguiente criterio:

$$\text{si} \quad \operatorname{sen}(K_0+K_1) \le \cos(K_0+K_1) \quad \Rightarrow \quad K_0+K_1 = \arcsin\left(\operatorname{sen}(K_0+K_1)\right)$$

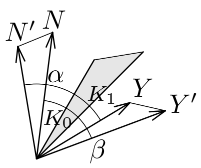
$$\text{si} \quad \operatorname{sen}(K_0+K_1) > \cos(K_0+K_1) \quad \Rightarrow \quad K_0+K_1 = \operatorname{arc\,cos}\left(\cos(K_0+K_1)\right)$$

O emplear la tangente, como hicimos para K_0 y K_1.

Con valores pequeños de i conviene ajustar los valores obtenidos de K_0 y K_1 para que su suma sea $K_0 + K_1$, ya que este valor está determinado con mucha más precisión que aquellos. Si i es exactamente cero entonces asignamos K_0 y K_1 de manera arbitraria con tal de que su suma, que conocemos, sea correcta. Podemos asignar por ejemplo todo a K_1 o todo a K_0.

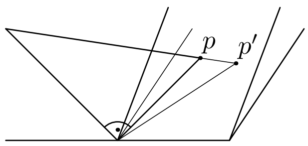
2. Ángulos en la fotografía inclinada

Un aspecto muy interesante de la fotografía inclinada es la posición relativa del Norte (eje Y del sistema de referencia), la línea de máxima pendiente y el eje Y de la fotografía. El ángulo entre los dos ejes Y lo concemos de momento dividido en dos partes: K_0 y K_1. El primero sobre el plano XY del sistema de referencia (terreno) y el segundo sobre el plano de la fotografía. Es interesante conocer el ángulo completo en el terreno, azimut del eje Y fotográfico, o en la fotografía, situación del Norte en la foto.

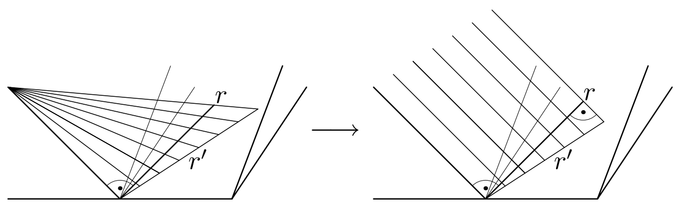


$\alpha + K_1$: sobre la fotografía
$K_0 + \beta$: Sobre el terreno

Para ello es necesario establecer la correspondencia entre ángulos en la fotografía y en el terreno. La correspondencia entre puntos homólogos se realiza proyectando a través del centro de proyección. Pero para hallar la relación entre ángulos nos es suficiente la correspondencia entre rectas, que es más sencilla.

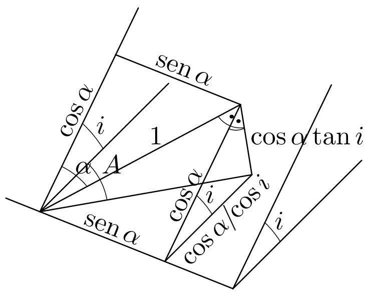


Correspondencia entre puntos



Correspondencia entre rectas

El haz de rayos proyectivos que hace corresponder la recta r a la recta r' forma un plano que contiene a r perpendicular al plano de la fotografía. Por lo tanto podemos realizar la correspondencia a través de perpendiculares. De esta manera estamos modificando la relación punto a punto, pero no importa porque la correspondencia r–r' se mantiene. Esto implica también que los ángulos sobre el fotograma con el vértice en el punto principal dependen sólo de la situación del plano de la fotografía respecto al terreno y son independientes de la distancia de proyección (distancia focal).

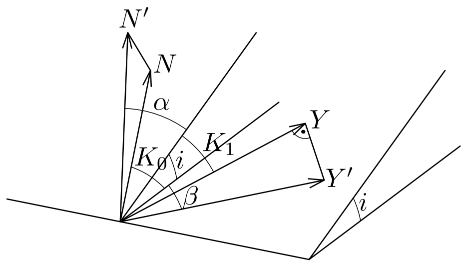


Sea α el ángulo en la fotografía, medido a partir de la línea de máxima pendiente, y A el ángulo en el terreno. Tomamos sobre la recta de la fotografía un segmento de longitud 1. Proyectamos su extremo sobre la línea de máxima pendiente y sobre la recta de corte de los dos planos, formándose así dos triángulos rectángulos cuyos catetos son $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$. A partir de estos últimos (los que valen $\cos\alpha$) obtenemos en otro triángulo rectángulo los segmentos $\cos\alpha\tan i$ y $\cos\alpha/\cos i$ (¡Ojo a la posición del ángulo recto!).

$$\text{Entonces} \quad \tan A = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha/\cos i} \quad \rightarrow \quad \tan A = \tan\alpha\cos i \qquad (1)$$

También podemos calcular el ángulo que forman las dos rectas, $\widehat{rr'}$, aproximadamente el ángulo de inclinación de r:

$$\tan\varepsilon = \frac{\cos\alpha\tan i}{1} = \tan i\cos\alpha$$



Azimut del eje Y de la fotografía: $K_0 + \beta$.

$$\tan K_0 = \frac{m_{31}}{m_{32}} \quad , \quad \tan\beta = \tan K_1 \cos i = -\frac{m_{13}}{m_{23}} m_{33}$$

Posición del Norte en la fotografía: $\alpha + K_1$.

$$\tan\alpha = \frac{\tan K_0}{\cos i} = \frac{m_{31}}{m_{32}m_{33}} \quad , \quad \tan K_1 = -\frac{m_{13}}{m_{23}}$$

A partir de la fórmula de la tangente de la suma podemos obtener $\tan(K_0+\beta)$ y $\tan(\alpha+K_1)$ en función de m_{31}, m_{32}, m_{13}, m_{23} y m_{33} directamente.
Recordamos que $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.

$$\tan(K_0+\beta) = \frac{\frac{m_{31}}{m_{32}} - \frac{m_{13}m_{33}}{m_{23}}}{1 + \frac{m_{31}m_{13}m_{33}}{m_{32}m_{23}}} = \frac{m_{31}m_{23} - m_{13}m_{32}m_{33}}{m_{32}m_{23} + m_{31}m_{13}m_{33}} \tag{2}$$

$$\tan(\alpha+K_1) = \frac{\frac{m_{31}}{m_{32}m_{33}} - \frac{m_{13}}{m_{23}}}{1 + \frac{m_{31}m_{13}}{m_{32}m_{23}m_{33}}} = \frac{m_{31}m_{23} - m_{13}m_{32}m_{33}}{m_{32}m_{23}m_{33} + m_{31}m_{13}} \tag{3}$$

Expresiones que sólo se diferencian en la posición de m_{33} en el denominador.

Si trabajamos con los ángulos,

$$\begin{aligned}\tan(K_0+\beta) &= \frac{\tan K_0 + \tan K_1 \cos i}{1 - \tan K_0 \tan K_1 \cos i} = \frac{\cos K_1 \operatorname{sen} K_0 + \operatorname{sen} K_1 \cos K_0 \cos i}{\cos K_1 \cos K_0 - \operatorname{sen} K_1 \operatorname{sen} K_0 \cos i} \\ &= \frac{-m_{12}}{m_{11}} \qquad \text{Azimut del eje } Y \text{ de la fotografía} \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+K_1) &= \frac{\frac{\tan K_0}{\cos i} + \tan K_1}{1 - \frac{\tan K_0 \tan K_1}{\cos i}} = \frac{\cos K_1 \operatorname{sen} K_0 + \operatorname{sen} K_1 \cos K_0 \cos i}{\cos K_1 \cos K_0 \cos i - \operatorname{sen} K_1 \operatorname{sen} K_0} \\ &= -\frac{m_{12}}{m_{22}} \qquad \text{Posición del norte en la fotografía} \end{aligned} \tag{5}$$

Las igualdades (2)=(4) y (3)=(5) las podemos tomar como propiedades de las matrices de rotación. Más concretamente,

$$m_{13}m_{32}m_{33} - m_{31}m_{23} = -m_{12}(1 - m_{33}^2)$$

Y las otras dos correspondientes igualdades para los denominadores. Se pueden demostrar sin más que sustituir los m_{ij} por sus expresiones.

Es importante realizar una observación acerca de los resultados que hemos obtenido. Hemos trabajado con una parametrización de la matriz de rotación, pero hemos llegado a unas expresiones para unos elementos con significado geométrico $(i, K_0, K_1, K_0 + \beta, \alpha + K_1)$ que dependen sólo de elementos de la matriz M. En dichas expresiones no interviene para nada la parametrización. Los elementos m_{ij} serán valores concretos conocidos a partir de los cuales obtenemos los elementos anteriores.

3. El ángulo de inclinación

$\mathrm{M} = (m_{ij})$, en donde m_{ij} es el coseno del ángulo que forman el eje x_i del sistema de la fotografía con el eje X_j del terreno. Por ejemplo, $m_{12} = \cos(x_{\text{fot}} Y_{\text{terr}})$. Entonces m_{33} es el coseno del ángulo entre los ejes Z. Pero sabemos que también $m_{33} = \cos i$, de donde i es el ángulo entre los dos ejes Z. Esto gráficamente es evidente.

Podemos intentar obtener el ángulo de inclinación en función de los ángulos Ω y Φ de la parametrización Ω, Φ, K. Para ello no tenemos más que fijarnos en el el elemento m_{33}, que será igual a $\cos i$. $m_{33} = \cos\Phi\cos\Omega = \cos i$. Si los giros los realizamos en el orden Φ, Ω, K, en la expresión anterior tenemos que intercambiar Ω y Φ, pero como es simétrica queda invariante. Por otra parte, si previamente a los giros Ω y Φ realizamos un giro K, está claro que éste no afecta para nada a la inclinación del plano. Por lo tanto todas las parametrizaciones en base a los giros Ω, Φ, K lógicas (con el giro K en un extremo) tienen invariante $\cos\Omega\cos\Phi$, aunque los valores independientes de Ω y Φ sean distintos.

La expresión $\cos\Omega\cos\Phi = \cos i$ es aparentemente muy distinta de la tan extendida $\Omega^2 + \Phi^2 = i^2$. Esta última es un desarrollo polinómico de la primera limitado a los términos de segundo orden, despreciando los de cuarto orden y superiores. Sólo es válida para valores de i pequeños.
Si x es pequeño $\quad\Rightarrow\quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$.
Entonces hasta el segundo orden se cumple

$$\left(1 - \frac{\Omega^2}{2}\right)\left(1 - \frac{\Phi^2}{2}\right) = \left(1 - \frac{i^2}{2}\right)$$

$$1 - \frac{\Omega^2 + \Phi^2}{2} + \frac{\Omega^2\Phi^2}{4} = 1 - \frac{i^2}{2}$$

$$\Omega^2 + \Phi^2 = i^2$$

Despreciando el término de cuarto orden.
El error cometido es de cuarto orden en i^2, lo que significa que en i es de tercer orden, y por tanto se obtiene una aproximación de segundo orden.

Calcular el ángulo de inclinación a través de los cosenos tiene el problema que ya apuntamos para los ángulos pequeños. Por eso es mejor transformarlos a senos.

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 - \cos^2\Omega\cos^2\Phi} &= \sqrt{1 - \cos^2 i} \\
\sqrt{1 - (1 - \operatorname{sen}^2\Omega)(1 - \operatorname{sen}^2\Phi)} &= \operatorname{sen} i \\
\sqrt{1 - (1 - \operatorname{sen}^2\Omega - \operatorname{sen}^2\Phi + \operatorname{sen}^2\Omega\operatorname{sen}^2\Phi)} &= \operatorname{sen} i \\
\sqrt{\operatorname{sen}^2\Omega + \operatorname{sen}^2\Phi - \operatorname{sen}^2\Omega\operatorname{sen}^2\Phi} &= \operatorname{sen} i
\end{aligned}$$

Otras dos expresiones equivalentes para el radicando son $\operatorname{sen}^2\Omega + \operatorname{sen}^2\Phi\cos^2\Omega$ y $\operatorname{sen}^2\Phi + \operatorname{sen}^2\Omega\cos^2\Phi$, que también son válidas para ángulos pequeños y a las que se puede llegar directamente a partir de $m_{13}^2 + m_{23}^2 = \operatorname{sen}^2 i$ y $m_{31}^2 + m_{32}^2 = \operatorname{sen}^2 i$.

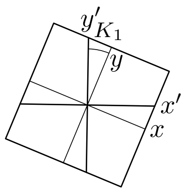
En la práctica la mejor solución consiste en tomar $\cos\Omega\cos\Phi$, y si el resultado es menor de, por ejemplo, 0,001, emplear la simplificación $i = \sqrt{\Omega^2 + \Phi^2}$.

4. Cálculo de la fotografía horizontal

Ya sabemos obtener los ángulos i, K_0, K_1 a partir de la matriz de rotación. Estos elementos serán necesarios para horizontalizar analíticamente el fotograma.

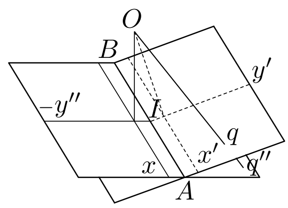
En primer lugar pasamos las coordenadas a un sistema en el que el eje y coincide con la línea de máxima pendiente. Para ello hay que aplicar a las coordenadas un giro $-K_1$.

$$\begin{aligned}
x' &= \cos K_1 x + \sin K_1 y \\
y' &= -\sin K_1 x + \cos K_1 y
\end{aligned}$$

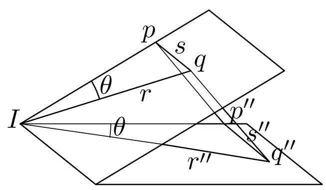


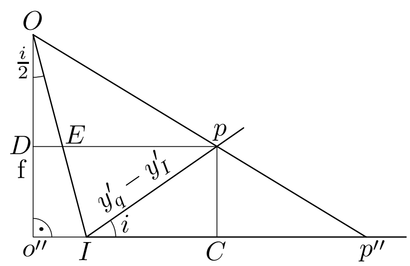
Para que los gráficos sean más fácilmente comprensibles, de aquí en adelante dibujaremos los bordes del fotograma paralelos a los ejes x', y'.

Si la fotografía se hubiese obtenido en el mismo punto O pero en posición horizontal, en lugar del punto q la imagen sería el punto q'', de coordenadas x'', y''. Existen diversas maneras de obtener las coordenadas de q'' a partir de las de q. El que desarrollamos a continuación se basa en tres puntos.



- Los transformados de los puntos situados en el eje y' son fáciles de calcular.
- Las rectas paralelas a $\overline{AB}$ lo siguen siendo después de la transformación.
- Los ángulos con vértice en el isocentro (I) se conservan.





El proceso es el siguiente: Sea p la proyección de q sobre el eje y' y s la recta que pasa por q y p. Calculamos el transformado de p: p''. q'' se encuentra en la intersección de la transformada de s, s'', con la recta r'', transformada de r, que forma con el eje y'' el mismo ángulo θ. Las coordenadas respecto al isocentro las denotaremos con el superíndice I.
$y'_I = -y''_I = -\mathrm{f}\tan\frac{i}{2} \quad \Rightarrow \quad {y'_p}^I = y'_p + \mathrm{f}\tan\frac{i}{2}$, ${y''_{p''}}^I = y''_p - \mathrm{f}\tan\frac{i}{2}$
${x'_p}^I = x'_p$, ${x''_{p''}}^I = x''_p$

Tenemos que obtener ${y''_{p''}}^I = \overline{Ip''}$. Lo obtendremos como $\overline{o''p''} - \overline{o''I}$.

$$\overline{o''I} = \mathrm{f}\tan\frac{i}{2}$$

$$\overline{o''p''} = \overline{Dp}\frac{\overline{Oo''}}{\overline{OD}} = \left(\overline{o''I} + \overline{IC}\right)\frac{\overline{Oo''}}{\overline{Oo''} - \overline{pC}}$$

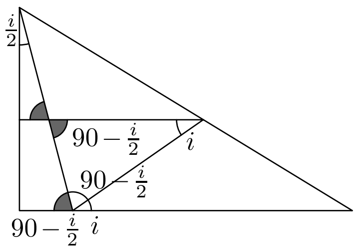
$$\overline{o''p''} = (\mathrm{f}\tan\frac{i}{2} + {y'_p}^I\cos i)\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{f} - {y'_p}^I \operatorname{sen} i} = \frac{\mathrm{f}^2\tan\frac{i}{2} + \mathrm{f}{y'_p}^I\cos i}{\mathrm{f} - {y'_p}^I\operatorname{sen} i}$$

$${y''_{p''}}^I = \overline{o''p''} - \overline{o''I} = \frac{\mathrm{f}^2\tan\frac{i}{2} + \mathrm{f}{y'_p}^I\cos i}{\mathrm{f} - {y'_p}^I\operatorname{sen} i} - \mathrm{f}\tan\frac{i}{2} = \frac{\mathrm{f}{y'_p}^I\cos i + \mathrm{f}\tan\frac{i}{2}{y'_p}^I\operatorname{sen} i}{\mathrm{f} - {y'_p}^I\operatorname{sen} i}$$

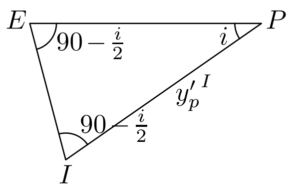
$$y''^{I}_{p''} = \frac{\mathrm{f}y'^{I}_{p}\left(\cos i + \tan\frac{i}{2}\,\mathrm{sen}\, i\right)}{\mathrm{f} - y'^{I}_{p}\,\mathrm{sen}\, i} = \frac{\mathrm{f}y'^{I}_{p}}{\mathrm{f} - y'^{I}_{p}\,\mathrm{sen}\, i}$$

Puesto que $\tan\dfrac{i}{2} = \dfrac{1-\cos i}{\mathrm{sen}\, i}$.

La última expresión también la podemos escribir como $y''^{I}_{p''} = y'^{I}_{p}\frac{\overline{Oo''}}{\overline{OD}}$. Ahora bien, se cumple $y''^{I}_{p''} = \overline{EP}\frac{\overline{Oo''}}{\overline{OD}}$, lo que significa $y'^{I}_{p} = \overline{EP}$. Esto lo podemos ver si completamos los ángulos en la figura.



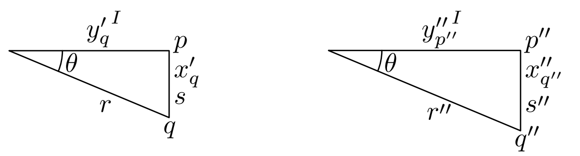
Los tres ángulos marcados en negro son iguales, por lo que $\triangle PEI$ es isósceles.



$$\overline{EP} = \overline{IP} = y'^{I}_{p}$$

Lo que da lugar a un desarrollo mucho más directo.

Hallamos la coordenada $x''_{q''}$ aplicando la consevación del ángulo θ.



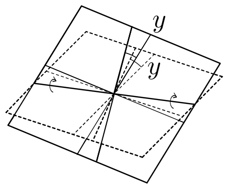
$$x''_{q''} = x'_{q}\frac{y''^{I}_{p''}}{y'^{I}_{p}} = \frac{\mathrm{f}x'_{q}}{\mathrm{f} - y'^{I}_{p}\,\mathrm{sen}\, i}$$

Finalmente sumamos y''_{I} a $y''^{I}_{q''}$, lo que completa el cálculo de las coordenadas de q'' en el sistema x'', y''.

$$x'' = x'\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{f} - y'^{I}\,\mathrm{sen}\, i} \tag{6}$$

$$y'' = y'^{I}\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{f} - y'^{I}\,\mathrm{sen}\, i} + \mathrm{f}\tan\frac{i}{2} \tag{7}$$

Si lo que queremos son las coordenadas de los puntos imagen "como si la fotografía se hubiese obtenido exactamente igual pero horizontal" todavía falta aplicar un giro K_1 para restituir los ejes x, y originales. El giro es K_1 y no β (el β de la sección 2) como a lo mejor pudiera parecer, ya que los ejes de la fotografía no son algo que se proyecte, sino algo que está *en* la fotografía, y que se mueven solidarios a ella cuando la giramos o desplazamos.



Es más, si los ejes los proyectásemos, los nuevos ejes x, y dejarían de ser perpendiculares.

Pero seguramente no tengamos ningún interés en mantener la posición original del eje y en la fotografía horizontalizada. Sin embargo sí que puede tenerlo el que la fotografía quede orientada según el sistema de referencia. Para eso tenemos que realizar un giro $-K_0$.

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix}_{q''} = \begin{pmatrix} \cos K_0 & \operatorname{sen} K_0 \\ -\operatorname{sen} K_0 & \cos K_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}_{q''} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} x''' &= x'' \cos K_0 + y'' \operatorname{sen} K_0 \\ y''' &= -x'' \operatorname{sen} K_0 + y'' \cos K_0 \end{aligned}$$

Las expresiones (6) y (7) podemos expresarlas directamente en función de y', sin tener que pasar a través de y'^I. Simplemente sustituimos y'^I por su valor: $y' + \mathrm{f} \tan \frac{i}{2}$. En primer lugar el denominador:

$$\begin{aligned} \mathrm{f} - y'^I \operatorname{sen} i &= \mathrm{f} - \left(y' + \mathrm{f} \tan \tfrac{i}{2}\right) \operatorname{sen} i = \mathrm{f} - \left(y' \operatorname{sen} i + \mathrm{f}(1 - \cos i)\right) = \\ &= \mathrm{f} \cos i - y' \operatorname{sen} i \end{aligned}$$

Lo que nos da la expresión para la x.

$$x'' = x' \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{f} \cos i - y' \operatorname{sen} i} \tag{8}$$

Para la y tenemos que hacer alguna operación más.

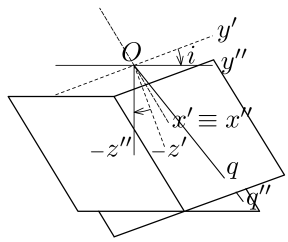
$$\begin{aligned} y'' &= y'^I \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{f} - y'^I \operatorname{sen} i} + \mathrm{f} \tan \frac{i}{2} = \left(y' + \mathrm{f} \tan \frac{i}{2}\right) \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{f} \cos i - y' \operatorname{sen} i} + \mathrm{f} \tan \frac{i}{2} \\ &= \mathrm{f} \left\{ \frac{y' + \mathrm{f} \tan \frac{i}{2}}{\mathrm{f} \cos i - y' \operatorname{sen} i} + \tan \frac{i}{2} \right\} \\ &= \mathrm{f} \, \frac{y' + \mathrm{f} \tan \frac{i}{2} + (\mathrm{f} \cos i - y' \operatorname{sen} i) \tan \frac{i}{2}}{\mathrm{f} \cos i - y' \operatorname{sen} i} \end{aligned}$$

Ahora sustituimos $\tan \frac{i}{2}$, primero por $\frac{1-\cos i}{\operatorname{sen} i}$ y después por $\frac{\operatorname{sen} i}{1+\cos i}$.

$$\begin{aligned} y'' &= \mathrm{f}\, \frac{y' - y'(1-\cos i) + \mathrm{f} \tan \frac{i}{2} + \mathrm{f} \cos i \tan \frac{i}{2}}{\mathrm{f} \cos i - y' \operatorname{sen} i} \\ &= \mathrm{f}\, \frac{y' \cos i + \mathrm{f} \tan \frac{i}{2}(1+\cos i)}{\mathrm{f} \cos i - y' \operatorname{sen} i} = \mathrm{f}\, \frac{y' \cos i + \mathrm{f} \operatorname{sen} i}{\mathrm{f} \cos i - y' \operatorname{sen} i} \\ &= (y' \cos i + \mathrm{f} \operatorname{sen} i) \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{f} \cos i - y' \operatorname{sen} i} \end{aligned} \tag{9}$$

5. Interpretación de (8) y (9)

Las expresiones (8) y (9) podemos obtenerlas por otro camino que nos da el significado de cada uno de los términos que aparecen en ellas.



En primer lugar, situamos los ejes con el origen en O, como se suele hacer cuando se considera también la coordenada z. Las coordenadas x, y no se ven afectadas, ya que la traslación efectuada para pasar los ejes sobre la fotografía a la posición con origen en O es a lo largo del eje z.

Pasamos las coordenadas de q del sistema x', y', z' al x'', y'', z'' realizando un giro en torno al eje x de valor i. La coordenada x no varía: $x'' = x'$; y las coordenadas y, z lo hacen de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} y'' \\ z'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos i & -\operatorname{sen} i \\ \operatorname{sen} i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos i & -\operatorname{sen} i \\ \operatorname{sen} i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ -\mathrm{f} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y'' &= y' \cos i + \mathrm{f} \operatorname{sen} i \\ z'' &= y' \operatorname{sen} i - \mathrm{f} \cos i \end{aligned}$$

Aplicándolo a q,

$$\begin{aligned} x''_q &= x'_q \\ y''_q &= y'_q \cos i + \mathrm{f} \operatorname{sen} i \\ z''_q &= -(\mathrm{f} \cos i - y'_q \operatorname{sen} i) \end{aligned}$$

Las coordenadas de q'' en el sistema x'', y'', z'' (y en cualquier sistema centrado en O) son proporcionales a las de q. La razón de proporcionalidad la podemos establecer sabiendo que $z''_{q''} = -\mathrm{f}$.

$$\overrightarrow{Oq''} = \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{f}\cos i - y'_q \operatorname{sen} i}\overrightarrow{Oq}$$

Lo que nos permite hallar $x''_{q''}$ e $y''_{q''}$.

$$x''_{q''} = x''_q \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{f}\cos i - y'_q \operatorname{sen} i} = x'_q \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{f}\cos i - y'_q \operatorname{sen} i}$$

$$y''_{q''} = y''_q \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{f}\cos i - y'_q \operatorname{sen} i} = \left(y'_q \cos i + \mathrm{f} \operatorname{sen} i\right) \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{f}\cos i - y'_q \operatorname{sen} i}$$

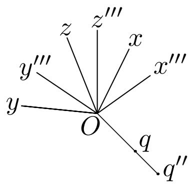
Que son las expresiones (8) y (9) respectivamente.

6. Método directo

El método que hemos desarrollado en las páginas anteriores consta de tres pasos (terminando con la fotografía orientada según el sistema de referencia).

$$(x, y)_q \xrightarrow{-K_1} (x', y')_q \xrightarrow{i, \lambda} (x'', y'')_{q''} \xrightarrow{-K_0} (x''', y''')_{q''}$$

Podemos realizarlo en dos pasos. En el primero "quitamos" todas las rotaciones de una vez, multiplicando por M^{-1}, lo que da como resultado las coordenadas de q en un sistema orientado igual que el de referencia pero centrado en O: el sistema x''', y''', z'''. Las coordenadas de q'' son proporcionales a las de q, y al igual que antes hallamos la relación de proporcionalidad sabiendo que $z'''_{q''} = -\mathrm{f}$.



$$(x, y, -\mathrm{f})_q \xrightarrow{\mathrm{M}^{-1}} (x''', y''', z''')_q \xrightarrow{\lambda} (x''', y''', z''')_{q''}$$

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix}_q = \mathrm{M}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -\mathrm{f} \end{pmatrix} = \mathrm{M}^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -\mathrm{f} \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \frac{-\mathrm{f}}{z'''_q} = \frac{\mathrm{f}}{-z'''_q} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} x'''_{q''} &= x'''_q \frac{\mathrm{f}}{-z'''_q} \\ y'''_{q''} &= y'''_q \frac{\mathrm{f}}{-z'''_q} \end{aligned}$$

Este método es el más práctico.